322. Generalised Harmonic Analysis ニ就イテ.（I）

北川敏男（阪大）

1. N. Wiener ハソノ論文 Tauberian Theorems (1932) ヲ結ブニ際シ、氏ノソコニ展開シタ Tauberian theory ガ Neumann–Stone 等ノ calculus of operators ニヨリ再検討サレル日ノ近キヲ豫想スルト、述べテ居ル。實際、コノ論文及ビコレニ先立ツ Generalised Harmonic Analysis (1930) ノ結果ハ Hilbert 空間ニ於ケル spectral theory ト著シイ類似点ヲモツ。

以下、Wiener ノコノ課題ニツイテ最近考ヘテ居ルコトヲ別ニ順序モ立テズ申シ述べタイト思フ。

2. Wiener ガソノ著書 The Fourier Integral デ定義シタ函數ノ class S ヲ考ヘル。即チ S ハ次ノ如キ $f(x)$ ノ全体カラナル：

$f(x)$ ハ $(-\infty, \infty)$ デ Measurable デアリ且ツスベテノ x ニツイテ

$$(1)\qquad \phi(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+\xi)\,\overline{f(\xi)}\,d\xi$$

ガ存在スルモノトスル。

今吾々ハ、コノ S ニ於イテ、任意ノ二ツノ函数 f, g ニ關シテ

$$(2)\quad (f,g)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(\xi)\,\overline{g(\xi)}\,d\xi$$

ニ由リ *inner product* (f,g) ヲ定義シヤウ。然ルトキコレカラ *Hilbert* 空間論ニ於ケル如ク、

(3) (i) $(x,y)=\overline{(y,x)}$

(ii) $(\alpha x+\beta x',y)=\alpha(x,y)+\beta(x',y)$

(iii) $(x,x)\geqq 0$

ヲ得ルコトハ容易ニ分カル。更ニ S ニ於イテ絶對値，距離等同樣ニ定義シウルコトハ言フマデモナイ。又、S ノ任意ノ有限個ノ *Element* ニ對シテ，

コレニ、一次独立ナ *Element* ガ常ニ存在スルコトハ B^2. *almost periodic function* ガ S ニ含マレテ居ルコトニ注意スレバヨイ。依ツテ *Hilbert* 空間ニナルタメニハ，

(4) 4.1. $(x,x)=0$ ナルトキ $x=0$

4.2. S ノ *separability*

4.3. S ノ *Completeness*

ノ三事實ガ要スルノミデアルガ ——4.1. ハ暫ク措ク——4.2. ノ成立シナイコトハ明カデアル。蓋シ S ハ *almost periodic function* ノ全体ヲ含ムカラ。ソコデ、吾々ハ，S ニ對シテ、既知ノ理論ヲ適用シヤウトスレバ、ソレハ，*Rellich, Löwer* 等ニ依ル廣義ゆーくりっど空間ノ *spectral theorey* ニ俟ツ外ハナイノデアル，但シ假リニ、4.3. ガ確保サレタト

スレバデアル。

然ルニ、4.3.ハ成立スルコトデアルカ，更ニハ、ソノ成否ガ容易ニ証明サレルコトデアロウカ？ 筆者ハ，コレニツイテ諸賢ノ御教示ヲ仰ギタイト思フモノデアルガ、シオシ今筆者ガ進マウトスル方針ハ，4.3.ヲ証明シテ行カウト云フノデハナイ。寧ロコレヲ回避スル立場ヲトル。

Wiener ノ理論ヲ通覧スルトキ、空間 S ノ *Completeness* ハ，何処ニモ必要トシテ居ラナイコトヲ看ルノデアツテ、氏ノ理論ノ検討ニ之レヲ確立シテカラデナクテハ進マレナイ様デハ，餘リニ迂路ヲ経ルトノ感ヲ抱カナケレバナラヌカラデアル。

3. *Completeness* ヲ避ケルト云ツテモ、コレカラ述ベルコトハ，如何ナル立場カラ *Wiener* ノ理論ガ如何ニ眺メラレルカトイフニ止マリ、別ニ *Rellich*, *Löwer* ノ外ニ新シイコトヲ考ヘヤウト志スノデハナイ。要スルニ，以下ノ考察ハ，次ノ四項ニ盡キル：

(i) S ニ對シテコレヲ含ム空間，即チ S ノ *Element* ガ悉クソレニ属スルヤウナ空間ノ集合 S_ϵ ヲ考ヘル。

(ii) コヽニ各空間 S_ϵ ハ，廣義ゆーくりつど空間[1]デアルトスル。（以下デハ實ハ *Hilbert* 空間ニナッテキル）

(iii) 空間 S_ϵ ニ於イテ定義サレタ *inner product* ヲ $(f,g)_\epsilon$ デ表ハス。然ルトキ f 及ビ g ガ S ニ属スルトキ常ニ次ノ関係ガ成立スルトスル：

(5) $\lim\limits_{\epsilon\to 0}(f,g)_\epsilon=(f,g)$

(iv) S_ϵ ニ於イテハ，Rellich, Löwer ノ理論ニ由ル spectral theorey ガ成立ツタカラ (5) ニヨッテ (f,g) ノ representation ヲ得ル。

以上デ方針ハ盡キルノデ、誠ニワカリキッタコトニ過ギナイノデアルガ、Wiener ノ方法ニ必要ナコトハ，コレダケデアルヤウニ思ハレル。次節ニ於イテコレヲ具体的ニ述ベヤウ。

4. 今或ル定マッタ任意ノ正數 ϵ ニ對シテ

(6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(\xi)\frac{\sin\epsilon\xi}{\sqrt{\epsilon}\,\xi}\right|^2 d\xi<\infty$

ナル如キ f ノ全体ニ考ヘ，カヽルニツノ函數 f,g ニツイテソレラノ inner product トシテ

---

(1) 以下ニ見ラレル如ク S_ϵ ハ通常ノ Hilbert 空間デ separability サヘ成立スル。ココニ議論ノ方針トシテハ，S_ϵ ハ廣義ゆーくりっど空間デアッテヨイコトヲ强調シテオク。蓋シ Wiener ノ諸定理ヲ現ルニハ，Stone ノ定理（§4參照）ノミガ必要デアッテ、コレハ $\{V_t\}$ ガ t ニ關シテ連續ナラバ，Bochner ノ議論デ廣義ゆーくりっど空間ニ於イテモソノマヽ成リ立ツカラデアル。（コノコトハ吉田耕作氏ガ嘗ッテ本誌デ指摘サレタコトデアルカラ御參照ヲ乞フ。）

(7) $$(f, g)_\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\overline{g(\xi)} \frac{\sin^2 \epsilon\xi}{\epsilon\xi^2} d\xi$$

ヲ採用シ、絶對値，距離ヲ通常ノ如ク

(8) 絶對値 $|x|_\epsilon = \sqrt{(x, x)_\epsilon}$

距離 $|x-y|_\epsilon$

ヲ定義スル。コレヲ空間 S_ϵ ト云フ。コレニツイテ、以下ノ議論ニ要用ナコトハ次ノ I, II ノ性質デアル：

I. 明カニ S_ϵ ハ一ツノ Hilbert space ヲ形成スル、蓋シ S_ϵ ニ任意ノ函数 $f(\xi)$ ヲトルトキ Hilbert space $L^2(-\infty, \infty)$ ニ於テ

(9) $$f(\xi)\frac{\sin \epsilon\xi}{\epsilon\xi}$$

ナル函数ヲ考ヘル、コノ對應ハ一對一デアリ、isometric デアルカラデアル（(7)参照）。

依ッテ S_ϵ ニ於イテ spectral theorey が、成立スルノデアルが、以下ニ必要ナコトハ

(i) unitary operator ノ One-parameter group $\{U_t\}$ ニ関スル Stone ノ定理—即チ

(10) $$(U_t f, g)_\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d(E_\epsilon(\lambda) f, g)_\epsilon$$

(ii) コノ $\{U_t\}$ カラ S_ϵ ニ於ケル Operator ノ Schar $\{\Lambda_s\}$ ヲ次ノ関係ニヨリ定義スル。

$$(11)\quad \Lambda_s f = \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\, U_{t+s} f\, dt$$ [1]

但シ，コレニハ例ヘバ，$K(t)$ガ $(-\infty, \infty)$ デ有界且ツ可測而シテ

$$(12)\quad \int_{-\infty}^{\infty} |K(t)|^2 (1+|t|^2)\, dt < \infty$$

デアレバ充分デアル。

然ルトキ

$$(13)\quad (\Lambda_s f, g)_\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\left(\int_{-\infty}^{\infty} K(t)\, e^{it\lambda} dt\right) d\left(E_\epsilon(\lambda) f, g\right)_\epsilon$$

II. (i) Sニ属スル f ハ又 S_ϵ ニ属スル。茲ニ ϵ ハ任意ノ正數デアル。

吾々ノ議論デ主要ナコノ事實ハ，f ガ S ニ属スルトキ

$$(14)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\xi)|^2}{1+|\xi|^2} d\xi < \infty$$

ヲ示セバヨイ。コレニ對ヘルニハ，Wiener: The Fourier Integral 定理20ヲ用キル。

(ii) S ニ属スル任意ノ二ツノ f, g ニツイテ

$$(15)\quad \lim_{\epsilon \to 0} (f, g)_\epsilon = (f, g)$$

コレニ對シテハ Wiener 定理21ヲ modify スル．即チ

---

(1) コノ意味ハ例ヘバ Bochner Neumann Operational-differential equation I.ノ Part I. Preliminaries ヲ見ラレタシ。

定理21ハ

$$\lim_{\epsilon \to 0} (f, f)_\epsilon = (f, f)$$

ヲ示シテヰルノデアルカラ。